	Devoir de contrôle n°2 4 M_{1+2}	Durée :2H

EXERCICE

Soit ABC un triangle tel que AB = 2 AC et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On note ✋ le milieu de $[AB]$.

1/ Montrer qu'il existe un unique déplacement f dont on précisera l'angle tel que f (A) = ✋ et f (C) = B. Déduire que f est une rotation puis construire son centre Ω et le placer sur la figure.

2/ Soit $\mathcal{C}$ un cercle variable passant par A et Ω, et de centre un point de Δ : la médiatrice du segment $[\Omega A]$.

$\mathcal{C}$ recoupe (AC) en M et (AB) en N.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est de diamètre $[MN]$ puis déterminer l'image de (ΩM) par f.

b) Monter que f (M) = N et en déduire la nature du triangle ΩMN.

3/ On pose $g = f \circ S_\Delta$ et $h = S_\Delta \circ f \circ S_\Delta$.

a) Déterminer g (A) et $g(\Omega)$. En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

b) Montrer que f o h est une translation.

c) Déterminer h (A). Caractériser alors h.

PROBLEME

I/ Soit g la fonction définie par : $g(x) = \text{Log}(x+1) - \text{Log}\,x - \frac{1}{x+1}$.

1/ Déterminer le domaine de définition de g.

2/ Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.

3/ Etudier les variations de g.

4/ En déduire que pour tout $x \in D_g$, $g(x) > 0$.

II/ Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\left[\text{Log}(x+1) - \text{Log}\,x\right] & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1/ a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter le résultat géométriquement.

2/ Montrer que la limite de f en $+\infty$ égale à 1.

3/ Etudier les variations de f.

4/ Déterminer par leurs coordonnées les points d'intersection de C_f avec $\Delta : y = x$.

5/ Tracer C_f.

6/ a) Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $[0,1[$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{e-1}\right)$.

c) Tracer dans le même repère la courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1}.

III/ Soit $(u_n)_{n\in IN^*}$ la suite définie par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $\text{Log}(u_n) = f(n)$.

2/ En utilisant les variations de f , montrer que :

a) (u_n) est strictement croissante.

b) Pour tout $n \in IN^*$ $2 \leq u_n \leq e$.

3/ En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.